Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

18 июня 2022 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 18**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Найдите сумму цифр частного чисел $\underbrace{9\ldots9}_{100\text{ девяток}}$ и 3333.

2. Решите уравнение $x^2+4xy+13y^2-6y+1=0$.

3. Найдите радиус окружности, если вписанный в неё угол, сторонами которого служат хорды длины 2 и 3, опирается на дугу в 120°.

4. Саша и Паша бегают по стадиону. Если они бегут в одном направлении, то встречаются через каждые 5 минут 4 секунды, а если в противоположных направлениях — через каждые 1 минуту 16 секунд. Во сколько раз скорость одного мальчика больше скорости другого?

5. Решите неравенство $2\sqrt{x+2}<\frac{9}{x+4}-1$.

6. Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 12.

7. Для работы в классах проекта «Математическая вертикаль» необходимо выполнить квалификационную работу. Известно, что на эту работу каждый сотый учитель не успевает вовремя зарегистрироваться, каждый тридцать третий зарегистрировавшийся не приходит, а успешно выполняет работу лишь каждый четвёртый из пришедших. Найдите вероятность того, что случайно выбранный учитель успешно выполнит квалификационную работу.

8. Может ли дискриминант квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами равняться 2022?

9. Проценты спирта в первом, втором и третьем растворе образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в соотношении 5 : 3 : 2, то получится 20%-й раствор, а если в соотношении 1 : 3 : 6, то 40%-й. Какова доля спирта в каждом растворе?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение

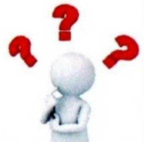
$$(x^2-(1+a)x-2a^2+2a)\sqrt{x-3}=0$$

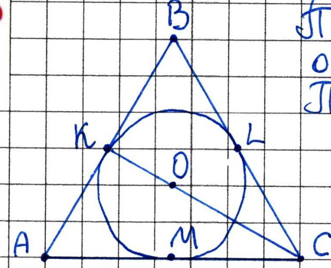
имеет ровно одно решение.

Часть 2

К задачам 11—12 приведены рукописные тексты решений.
1) Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.
2) Предложите правильное решение.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CK. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK=6$, $KB=12$.





Построим ω – вписанную окружность $\triangle ABC$.
Пусть L, M – точки касания ω со сторонами BC и AB, соответств.
Тогда по св-ву отрезков касательных имеем $AM=AK=6$, $BL=BK=12$, $CL=CM$.
Так как $\triangle ABC$ – р/б, то $CM=AM=6$.
Получаем $P_{\triangle ABC}=2\cdot12+4\cdot6=48$
Ответ: 48

12. Сколько существует шестизначных чисел, которые состоят из трёх чётных и трёх нечётных цифр?

Сначала выберем места для нечётных цифр: $6\cdot5\cdot4$ вариантов
Оставшиеся места займут чётные цифры.
Так как 5 нечётных цифр и 5 чётных, то для каждого места будет выбор из 5 вариантов.
Имеем $6\cdot5\cdot4\cdot5^6=24\cdot5^7$.
Ответ: $24\cdot5^7$.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

. . . .

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:

✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;

✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;

✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 75.
   1 балл — верный ответ без обоснования;
   1 балл — найдено частное чисел $(300030003\ldots0003)$ и верно указано количество цифр в нём.
2. $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.
3. $\sqrt{\frac{7}{3}}$.
   1 балл — верно найдена хорда, стягивающая дугу $(\sqrt{7})$;
   1 балл — получен ответ $\sqrt{\frac{19}{3}}$ из-за неверно найденного угла между хордами.
4. В $\frac{5}{3}$ раза.
5. $[-2; -1)$.
   1 балл — при правильном ходе решения ответ отличается от верного включением точки -1 или исключением точки -2.
6. $(0; 36]$.
   2 балла — при правильном ходе решения ответ отличается от верного включением точки 0;
   1 балл — при правильном ходе решения получен верный ответ, но не доказано, что наибольшее значение площади достигается, если треугольник равнобедренный.
7. 0,24.
   1 балл — выписано верное выражение $\left(\frac{99}{100} \cdot \frac{32}{33} \cdot \frac{1}{4}\right)$, но его значение не найдено или найдено неверно.
8. Нет.
   1 балл — доказано, что коэффициент b должен быть чётным.
9. $\dfrac{1}{16}$, $\dfrac{3}{16}$ и $\dfrac{9}{16}$ (или 0,0625, 0,1875, 0,5625).
   2 балла — ответ записан в виде 6,25%, 18,75%, 56,25%.
   1 балл — верно выписана система уравнений, но система не решена или при её решении допущена арифметическая ошибка.
10. $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$.
    1 балл — при правильном ходе решения ответ отличается от верного исключением одного или обоих концов отрезка.

В задачах 11–12:

✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);

✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;

✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Нельзя утверждать, что точка K является точкой касания вписанной окружности со стороной AB.
    Решение. По свойству биссектрисы получаем $BC = 2AC$. Поскольку $BC = AB = 18$, находим $AC = 9$. Отсюда $P_{ABC} = 45$.
12. *Ошибка 1.* Неверно найдено число вариантов для выбора трёх мест для нечётных цифр (должно быть C_6^3).
    Ошибка 2. Неверно найдена расстановка чисел по местам, так как нуль не может стоять на первом месте.
    Решение. Пусть на первом месте стоит нечётная цифра. Тогда для выбора мест для двух других нечётных цифр имеем $C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$ вариантов. Для любой позиции будет выбор из 5 цифр. Следовательно, получаем $10 \cdot 5^6$ чисел с нечётной цифрой на первом месте. Пусть на первом месте стоит чётная цифра. Тогда для выбора мест для двух других чётных цифр имеем $C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$ вариантов. На первой позиции может стоять одна из четырёх чётных цифр (так как число не может начинаться с нуля), на остальных — одна из пяти цифр. В этом случае получаем $10\cdot4\cdot5^5$. Итого $10\cdot5^6+10\cdot4\cdot5^5 = 18\cdot5^6 = 281250$ чисел.
    1 балл — верно указана *хотя бы одна* ошибка в представленном решении, при этом верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.