ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 1

Задача 1. (2 балла) Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-8n+17}{n-5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение $f(n) = \dfrac{n^2-8n+17}{n-5} = n-3+\dfrac{2}{n-5}$ принимает целые значения при $n-5=\pm 1$ или $n-5=\pm 2$, т. е. при $n=6, n=4, n=3, n=7$.

Имеем $f(3)=f(4)=-1$; $f(6)=f(7)=5$.

Ответ: -1 (при $n=3$ и $n=4$); 5 (при $n=6$ и $n=7$).

Критерии:

верное решение — 2 балла;

есть верная последовательность всех шагов решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 2. (1 балл) Вычислите $10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \dfrac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right)$.

Решение.

$$10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} + \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right) = 10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{7}{2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{7\cdot(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})}{2+5} + \frac{3\cdot(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})}{2-5}\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}}\left((2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}) - (2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})\right) =$$

$$= 10^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2\cdot 2^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}) = -2\cdot 10^{-\frac{1}{3}}\cdot 10^{\frac{1}{3}} = -2.$$

Ответ: -2.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 3. (1 балл) Вычислите $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^5$.

Решение.

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}\right)^5 =$$

$$= \left(|\sqrt{2}+1|-|\sqrt{2}-1|\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Ответ: 32.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 4. (2 балла) Не находя корней уравнения $3x^2-4x-1=0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{5}-3$.

Решение. Пусть $f(x)=3x^2-4x-1$. По теореме Виета произведение корней равно $-\dfrac{1}{3}$, поэтому корни разных знаков. Пусть x_1 — это меньший корень, тогда $x_1<0$ и $x_2>0$. Заметим, что $\sqrt{5}-3<0$, поэтому если $f(\sqrt{5}-3)>0$, то $x_1>\sqrt{5}-3$, а иначе $x_1<\sqrt{5}-3$. Поскольку $f(\sqrt{5}-3)=3(\sqrt{5}-3)^2-4(\sqrt{5}-3)-1=3(5-6\sqrt{5}+9)-4\sqrt{5}+12-1=53-22\sqrt{5}=\sqrt{2809}-\sqrt{2420}>0$, получаем $x_1>\sqrt{5}-3$.

Ответ: $x_1>\sqrt{5}-3$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

задача сведена к сравнению значения функции в точке $\sqrt{5}-3$ с нулём, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 5. (2 балла) Найдите все числа вида $\overline{32a5b4}$, которые кратны 72.

Решение. Число $\overline{32a5b4}$ кратно 72, если оно делится на 8 и на 9. По признаку делимости числа на 8 получаем, что число $\overline{5b4}$ должно делиться на 8, т. е. подходят $b=0$, $b=4$ и $b=8$. Следовательно, числа $\overline{32a504}$, $\overline{32a544}$ и $\overline{32a584}$ должны делиться на 9. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Тогда получим, что для числа $\overline{32a504}$ подходит только $a=4$; для числа $\overline{32a544}$ подходят $a=0$ и $a=9$; для числа $\overline{32a584}$ — только $a=5$.

Получаем числа 324504, 320544, 329544, 325584.

Ответ: 324504, 320544, 329544, 325584.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

найдены три варианта ответа из четырёх — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 6. (2 балла) Решите неравенство $\sqrt{|x+1|-1}>\sqrt{|x+1|-97}$.

Решение.

$$\sqrt{|x+1|-1}>\sqrt{|x+1|-97} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |x+1|-1>|x+1|-97; \\ |x+1|-97\geqslant 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad |x+1|\geqslant 97 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+1\leqslant -97; \\ x+1\geqslant 97 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x\leqslant -98; \\ x\geqslant 96. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-98]\cup[96;+\infty)$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 7. (2 балла) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$(x-3a)(x+2a+1)<0$$

выполняется для всех $x \in [1;3]$.

Решение. Пусть $f(x)=(x-3a)(x+2a+1)$. Решением неравенства $f(x)<0$ является интервал $(x_1;x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x)=0$. Неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполняется для всех $x \in [1;3] \Leftrightarrow [1;3] \subset (x_1;x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)<0, \\ f(3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-3a)(2a+2)<0, \\ (3-3a)(2a+4)<0. \end{cases}$

Отсюда находим $a \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 8. (2 балла) Ахиллес догонял черепаху, и когда расстояние между ними сократилось в 19 раз и составило 6 м, черепаха остановилась. Какой путь с момента начала погони проделала черепаха, если её скорость в 37 раз меньше скорости Ахиллеса?

Решение. Пусть v — скорость черепахи, тогда $37v$ — скорость Ахиллеса. Из условия следует, что изначально расстояние между Ахиллесом и черепахой было $19 \cdot 6 = 114$ м. Пусть t — время погони Ахиллеса за черепахой. Тогда $t = \dfrac{114-6}{37v-v} = \dfrac{3}{v}$. Следовательно, черепаха за время погони проползла $S = t \cdot v = \dfrac{3}{v} \cdot v = 3$ м.

Ответ: 3 м.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 9. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение $4\sin x + 5\cos x = a^2$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента. Имеем

$$4\sin x + 5\cos x = \sqrt{41} \cdot \sin(x+\varphi),$$

где $\varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{41}}$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений, если $a^2 \leqslant \sqrt{41} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt[4]{41}; \sqrt[4]{41}]$.

Ответ: $[-\sqrt[4]{41}; \sqrt[4]{41}]$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 10. (2 балла) Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?

Решение. Сумма цифр десятизначного числа равна 3 в трёх случаях:

1) В записи одна 3 и остальные 0. Такое число единственно — 3000000000.

2) В записи одна 2, одна цифра 1 и остальные 0. Если 2 стоит на первой позиции, а 1 может стоять на остальных 9 позициях — таких чисел 9. Аналогично, 9 чисел, в которых 1 стоит на первой позиции, а 2 на остальных 9 позициях.

3) В записи числа три 1 и остальные 0. Одна 1 стоит на первой позиции, у второй единицы — 9 вариантов, а у третьей — 8 вариантов. Но поскольку две единицы одинаковы, все числа мы посчитали 2 раза. Таким образом, имеем $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ вариантов.

Итого получаем $1 + 9 + 9 + 36 = 55$ вариантов.

Ответ: 55.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется ошибка в подсчёте количества вариантов в одном из трёх случаев построения подходящего числа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 11. (1 балл) Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.

1) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2) В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

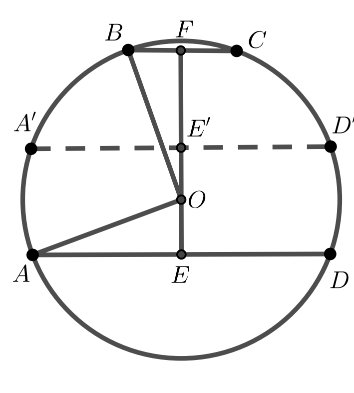
Критерии:

приведены оба основных свойства (равенство углов, совпадение медианы, биссектрисы и высоты) — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 12. (2 балла) Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

«**Задача.** Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 25, имеют длины 14 и 40. Найдите расстояние между этими хордами.



Решение. В задаче возможны два расположения хорды AD (штриховой линией $A'D'$ обозначен второй случай). Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 7$, а $AE = ED = 20$.

Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из $\triangle BOF$ находим $OF = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{676} = 24$,

2) из $\triangle AOE$ находим $OE = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15$.

Отсюда длина искомого отрезка в первом случае $EF = OE + OF = 39$. Длина отрезка $E'F = OF - OE' = 24 - 15 = 9$.

Ответ: 49 и 9.»

Критерии:

найдена ошибка в теореме Пифагора, приведено верное решение задачи — 2 балла;

найдена ошибка в теореме Пифагора, одна из конфигураций рассмотрена и доведена до верного ответа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.