ПИЛОТНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 30 ноября 2017 года

ВАРИАНТ 2

Задача 1. (2 балла) Найдите все целые значения дроби $\dfrac{n^2-12n+30}{n-3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение $f(n) = \dfrac{n^2-12n+30}{n-3} = n-9+\dfrac{3}{n-3}$ принимает целые значения при $n-3=\pm1$ или $n-3=\pm2$, т. е. при $n=4, n=2, n=0, n=6$.

Имеем $f(4)=f(2)=-10$; $f(0)=f(6)=-2$.

Ответ: -10 (при $n=0$ и $n=2$); -2 (при $n=4$ и $n=6$).

Критерии:

верное решение — 2 балла;

есть верная последовательность всех шагов решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 2. (1 балл) Вычислите $(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0{,}5})(2^{-1}+81^{-0{,}25})$.

Решение.

$$(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0{,}5})(2^{-1}+81^{-0{,}25}) = \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3} = \frac{35}{216}.$$

Ответ: $\dfrac{35}{216}$.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 3. (1 балл) Вычислите $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^5$.

Решение.

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\right)^5 =$$
$$= \left(|\sqrt{3}+1|-|\sqrt{3}-1|\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Ответ: 32.

Критерии:

верное решение — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 4. (2 балла) Не находя корней уравнения $4x^2-5x-1=0$, сравните его меньший корень с числом $\sqrt{3}-2$.

Решение. Пусть $f(x)=4x^2-5x-1$. По теореме Виета произведение корней равно $-\dfrac{1}{4}$, поэтому корни разных знаков. Пусть x_1 — это меньший корень, тогда $x_1<0$ и $x_2>0$. Заметим, что $\sqrt{3}-2<0$, поэтому если $f(\sqrt{3}-2)>0$, то $x_1>\sqrt{3}-2$, а иначе $x_1<\sqrt{3}-2$. Поскольку $f(\sqrt{3}-2)=4\cdot(\sqrt{3}-2)^2-5(\sqrt{3}-2)-1=4(3-4\sqrt{3}+4)-5\sqrt{3}+10-1=37-21\sqrt{3}=\sqrt{1369}-\sqrt{1323}>0$, получаем $x_1>\sqrt{3}-2$.

Ответ: $x_1>\sqrt{3}-2$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

задача сведена к сравнению значения функции в точке $\sqrt{3}-2$ с нулём, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 5. (2 балла) Найдите все числа вида $\overline{35a7b2}$, которые кратны 72.

Решение. Число $\overline{35a7b2}$ кратно 72, если оно делится на 8 и на 9. По признаку делимости числа на 8 получаем, что число $\overline{7b2}$ должно делиться на 8, т. е. подходят $b=1$, $b=5$ и $b=9$. Следовательно, числа $\overline{35a712}$, $\overline{35a752}$ и $\overline{35a792}$ должны делиться на 9. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Тогда получим, что для числа $\overline{35a712}$ подходят $a=0$ и $a=9$; для числа $\overline{35a752}$ подходит только $a=5$; для числа $\overline{35a792}$ — только $a=1$.

Получаем числа 350712, 359712, 355752, 351792.

Ответ: 350712, 359712, 355752, 351792.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

найдены три варианта ответа из четырёх — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 6. (2 балла) Решите неравенство $\dfrac{1}{|x-1|}<\dfrac{1}{|2x+1|}$.

Решение.

$$\frac{1}{|x-1|}<\frac{1}{|2x+1|} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} |2x+1|<|x-1|; \\ x\neq 1; \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (2x+1)^2<(x-1)^2; \\ x\neq 1; \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x^2+6x<0; \\ x\neq 1; \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -2<x<0; \\ x\neq 1; \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\ x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right).$$

Ответ: $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 7. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет 4 различных корня.

Решение. Пусть $t = |x+1|$, тогда исходное уравнение принимает вид $2at^2 - t + 1 = 0$. Исходное уравнение имеет 4 корня, если уравнение $2at^2 - t + 1 = 0$ имеет два положительных корня, т. е.

$$\begin{cases} D > 0; \\ t_1 + t_2 > 0; \\ t_1 t_2 > 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D = 1 - 8a > 0; \\ a > 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{8}; \\ a > 0. \end{cases} \Longleftrightarrow a \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right).$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется вычислительная ошибка — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 8. (2 балла) По окружности движутся два тела: первое тело проходит круг на 2 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности проходит каждое тело за 1 с?

Решение. Пусть x — время прохождения круга первым телом, тогда $x+2$ — время прохождения круга вторым телом. Длину круга возьмем за 1. Тогда скорости тел (части окружностей, проходимых телами за 1 с) равны $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+2}$, соответственно. Имеем уравнение:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}} = 60 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2) = 120 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 10; \\ x = -12. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

Отсюда находим $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{12}$.

Ответ: $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{12}$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 9. (2 балла) Найдите все значения a, при которых уравнение $2\sin x - 3\cos x = -a^2$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента. Имеем

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\cdot\sin(x-\varphi),$$

где $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Следовательно, исходное уравнение имеет бесконечно много решений, если $|-a^2| \leqslant \sqrt{13} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt[4]{13}; \sqrt[4]{13}]$.

Ответ: $[-\sqrt[4]{13}; \sqrt[4]{13}]$.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

иначе — 0 баллов.

Задача 10. (2 балла) Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 3?

Решение. Сумма цифр десятизначного числа равна 3 в трёх случаях.

1) В записи одна 3 и остальные 0. Такое число единственно — 300000000.

2) В записи одна 2, одна цифра 1 и остальные 0. Если 2 стоит на первой позиции, а 1 может стоять на остальных 8 позициях — таких чисел 8. Аналогично, есть 8 чисел, в которых 1 стоит на первой позиции, а 2 на остальных 8 позициях.

3) В записи числа три 1 и остальные 0. Одна 1 стоит на первой позиции, у второй единицы — 8 вариантов, а у третьей — 7 вариантов. Но поскольку две единицы одинаковы, все числа мы посчитали 2 раза. Таким образом, имеем $\dfrac{8\cdot 7}{2} = 36$ вариантов.

Итого получаем $1+8+8+28 = 45$ вариантов.

Ответ: 45.

Критерии:

верное решение — 2 балла;

присутствуют все шаги решения, но имеется ошибка в подсчёте количества вариантов в одном из трёх случаев построения подходящего числа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.

Задача 11. (1 балл) Сформулируйте признаки параллелограмма.

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

3) Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

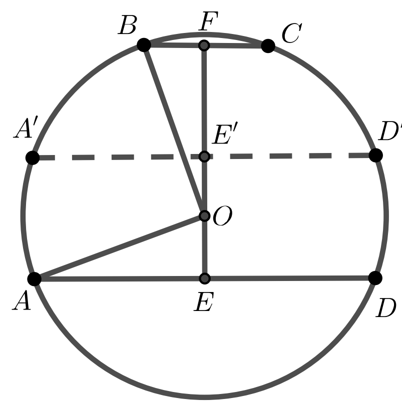
Критерии:

приведены три или более признаков — 1 балла;

если перепутан признак и определение параллелограмма (и при других логических ошибках) — 0 баллов.

Задача 12. (2 балла) Найдите все ошибки в предложенном решении задачи и приведите верное решение (с ответом). Ошибки можно исправлять на этом листе, обведя нужный фрагмент решения и прокомментировав, в чём именно заключается ошибка.

«**Задача.** Две параллельные хорды окружности, радиус которой равен 17, имеют длины 16 и $4\sqrt{30}$. Найдите расстояние между этими хордами.



Решение. В задаче возможны два расположения хорды AD (штриховой линией $A'D'$ обозначен второй случай). Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 8$, а $AE = ED = 2\sqrt{30}$.

Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, получаем $BF = FC = 8$, а $AE = ED = 2\sqrt{30}$.

Воспользуемся теоремой Пифагора:

1) из $\triangle BOF$ находим $OF = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{361} = 15$,

2) из $\triangle AOE$ находим $OE = \sqrt{17^2 - 120} = \sqrt{169} = 13$.

Отсюда длина искомого отрезка в первом случае $EF = OE + OF = 28$. Длина отрезка $E'F = OF - OE' = 15 - 13 = 2$.

Ответ: 28 и 2.»

Критерии:

найдена ошибка в теореме Пифагора, приведено верное решение задачи — 2 балла;

найдена ошибка в теореме Пифагора, одна из конфигураций рассмотрена и доведена до верного ответа — 1 балл;

иначе — 0 баллов.