

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1–10.

1. Найдите все значения x , при которых числа $x + \sqrt{2x} - 4$ и $4 + \sqrt{2x} - x$ имеют противоположные знаки?
2. На столе лежат 27 экзаменационных билетов с номерами от 1 до 27. Студенты по очереди тянут (без возвращения) по одному билету. Какова вероятность того, что третьему студенту достанется билет из первых десяти, если первый студент вытянул билет № 3, а второй — билет № 24?
3. Медианы KP и LQ треугольника KLM равны и пересекаются в точке O . Найдите высоту MH треугольника KLM , если $MO = 4$.
4. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью? (В ответе укажите все возможные варианты.)
5. Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 244 раза меньше суммы десяти её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.
6. Решите неравенство $|1 - x| \leq \frac{21-3x}{|x-1|}$.
7. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{(x+3)(x+12)}{6x}$ на луче $x > 0$.
8. В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ . Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\cos \angle MDQ = \frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника DEF .
9. Докажите, что число $n^4 + 2n^2 + 9$ составное при любом натуральном n .
10. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + a(x + b) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Часть 2

К задачам 11–12 приведены рукописные тексты решений.

- 1) Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.
- 2) Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.

11. Найдите значение выражения $\sqrt{31 - 8\sqrt{15}} - \sqrt[3]{162 - 42\sqrt{15}}$.

12. В равнобедренном треугольнике MNP с основанием MP вписанная окружность касается боковой стороны NP в точке R . Отрезок MR пересекает вписанную окружность в точке Q . Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $MP = 4\sqrt{2}$, $QR = 2$.

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1–10.

1. Найдите все значения x , при которых числа $3 + \sqrt{4x} - x$ и $x + \sqrt{4x} - 3$ имеют противоположные знаки?
2. В соревновании участвуют 17 спортсменов, все из разных стран. Очередность выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что спортсмен из России будет выступать в числе первых десяти, если известно, что спортсменам из Англии и США выпали номера 2 и 15?
3. Медианы AM и BN треугольника ABC равны и пересекаются в точке O . Найдите высоту CH треугольника ABC , если $OH = 6$.
4. Один дом в микрорайоне, состоящем из 7 домов, имеет в среднем 19 этажей, причём число этажей каждого из домов не превышает 21. Сколько этажей может иметь при этих условиях самый низкий дом в этом микрорайоне? (В ответе укажите все возможные варианты.)
5. Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трёх её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.
6. Решите неравенство $\frac{10+x}{|x-2|} \geq |2-x|$.
7. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{(x+4)(x+9)}{6x}$ на луче $x > 0$.
8. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу опущены медиана AM и высота AH . Известно, что $AH = \frac{6}{\sqrt{13}}$ и $\cos \angle MAH = \frac{12}{13}$. Найдите катеты треугольника ABC .
9. Докажите, что число $n^4 + n^2 + 25$ составное при любом натуральном n .
10. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x - 6y + 5 = 0, \\ y + bx + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Часть 2

К задачам 11–12 приведены рукописные тексты решений.

- 1) Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.
- 2) Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.

11. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{61\sqrt{13} - 220} - \sqrt{22 - 6\sqrt{13}}$.

12. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольнике ABC с основанием AC , касается боковой стороны BC в точке Q . Отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AC = 2\sqrt{2}$, $PQ = 1$.

Критерии проверки работ

Каждая задача оценивается, исходя из 2 баллов. 1 балл ставится, если решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка.

Ответы к варианту 1

- $[0; 2) \cup (8; +\infty)$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точек 2, 8.
1 балл — ответ отличается от верного исключением точки 0.
- $\frac{9}{25} = 0,36$.
1 балл — дан верный ответ 0,36.
2 балла — присутствует короткое решение $\frac{9}{25} = 0,36$.
6. *Указание.* Доказать, что KLM — равнобедренный (PQ — средняя линия, $LPQK$ — равнобедр. трапеция).
1 балл — доказано, что $\triangle KLM$ — равнобедренный (или PQ — средняя линия, $LPQK$ — равнобедр. трапеция), верный ответ не получен.
1 балл — не доказано, что $\triangle KLM$ — равнобедренный, получен верный ответ.
- От 6 до 14.
0 баллов — получена только нижняя оценка.
1 балл — в ответе указан диапазон значений: верная нижняя оценка, неверная верхняя оценка.
3.
1 балл — получен ответ 3^5 .
1 балл — ответ отличается от верного включением случая $q = 1$.
- $[-5; 1) \cup (1; 4]$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точки 1.
- $9/2$.
1 балл — получена оценка, но не доказано, что она достигается.
1 балл — получена точка экстремума и верно найдено значение в ней, но не доказано, что она является точкой минимума.
1 балл — найдена точка минимума, значение функции в этой точке не найдено.
- 1 и 4.
1 балл — указано, что медиана равна половине гипотенузы, и найден один из катетов $\triangle MDQ$.
- 1 балл — получено разложение на множители $(n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3)$, случай когда первый множитель равен 1 не рассмотрен.

- $(-4; -1)$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точек $-4, -1$.
1 балл — получен ответ $(1; 4)$
1.
1 балл — найдены обе ошибки, правильный ответ не получен.
1 балл — найдена (указана) 1 ошибка, но при этом получен верный ответ.
- $\frac{8\sqrt{7}}{3}$.
1 балл — найдены обе ошибки (в формуле для касательной и секущей и в теореме косинусов), решение не доведено до конца.
1 балл — найдена ошибка в формуле для касательной и секущей, решение доведено до верного ответа.

Критерии проверки работ

Каждая задача оценивается, исходя из 2 баллов. 1 балл ставится, если решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка.

Ответы к варианту 2

- $[0; 1) \cup (9; +\infty)$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точек 1, 9.
1 балл — ответ отличается от верного исключением точки 0.
- $\frac{3}{5} = 0,6$.
1 балл — дан верный ответ 0,6.
2 балла — присутствует короткое решение $\frac{3}{5} = 0,6$.
18. Указание. Доказать, что ABC — равнобедренный (MN — средняя линия, $BMNA$ — равнобедр. трапеция).
1 балл — доказано, что $\triangle ABC$ (или MN — средняя линия, $BMNA$ — равнобедр. трапеция) — равнобедренный, верный ответ не получен.
1 балл — не доказано, что $\triangle ABC$ — равнобедренный, получен верный ответ.
- От 7 до 19.
0 баллов — получена только нижняя оценка.
1 балл — в ответе указан диапазон значений: верная нижняя оценка, неверная верхняя оценка.
7.
1 балл — получен ответ 7^3 .
1 балл — ответ отличается от верного включением случая $q = 1$.
- $[-1; 2) \cup (2; 6]$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точки 2.
- $25/6$.
1 балл — получена оценка, но не доказано, что она достигается.
1 балл — получена точка экстремума и верно найдено значение в ней, но не доказано, что она является точкой минимума.
1 балл — найдена точка минимума, значение функции в этой точке не найдено.
- 2 и 3.
1 балл — указано, что медиана равна половине гипотенузы, и найден один из катетов $\triangle MAN$.

- 1 балл — получено разложение на множители $(n^2 - 3n + 5)(n^2 + 3n + 5)$, случай когда первый множитель равен 1 не рассмотрен.
- $(-5; -1)$.
1 балл — ответ отличается от верного включением точек $-5, -1$.
1 балл — получен ответ $(1; 5)$
- -1 .
1 балл — найдены обе ошибки, правильный ответ не получен.
1 балл — найдена (указана) 1 ошибка, но при этом получен верный ответ.
- $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.
1 балл — найдены обе ошибки (в формуле для касательной и секущей и в теореме косинусов), решение не доведено до конца.
1 балл — найдена ошибка в формуле для касательной и секущей, решение доведено до верного ответа.