Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

15 апреля 2023 года Продолжительность 150 минут Вариант 22

……………………………………………...……………………………………………...

Часть 1

В задачах 1 – 5 оценивается только верный ответ.
В задачах 6 – 10 необходимы полные обоснованные решения задач.

1. (1 балл) Студент взялся читать учебник в ночь перед экзаменом. Первую треть учебника он читал со скоростью 60 страниц в час, вторую, после того, как притомился, - со скоростью 45 страниц в час, а последнюю треть, изрядно устав под утро, - со скоростью 9 страниц в час. Найдите среднюю скорость (в страницах в час) чтения учебника в ночь перед экзаменом.

2. (1 балл) Вычислите $\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{10})$.

3. (1 балл) В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 4 и 13, $\cos\angle BAC = -\frac{5}{13}$. Найдите расстояние от основания высоты, проведенной из вершины B, до середины стороны BC.

4. (1 балл) Найдите наименьшее возможное значение выражения $5x^2+2y^2$, если x и y - положительные числа, сумма которых равна 2.

5. (1 балл) Найдите все целые n, при которых выражение $\frac{n^3-n^2+21n}{n^2-n}$ является целым числом.

6. (2 балла) Экзамен по теории вероятности сдают 15 студентов третьего курса и несколько студентов второго курса. Можно считать, что для любого студента третьего курса вероятность сдать экзамен составляет 0.75, в то время как для студентов второго курса вероятность сдать – 0.45. Принимающий профессор рассчитал, что вероятность того, что случайный студент экзамен не сдаст, составляет 0.325. Студент Вова этот экзамен сдал, найдите вероятность того, что Вова – второкурсник.

7. (2 балла) Решите уравнение $6\,sin^3x+sin^2x-4\,sin\,x+1=0$

8. (2 балла) В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Оказалось, что $\angle ACM = \angle BCH$. Найдите угол C этого треугольника.

9. (4 балла) При каких значениях параметра b уравнение $|x-3|+|x+b|=4$ имеет бесконечно много решений?

10. (2 балла) Найдите угол между графиками $y = x^2-9x+26$ и $y=\frac{24}{x}$ в точке с абсциссой 3.

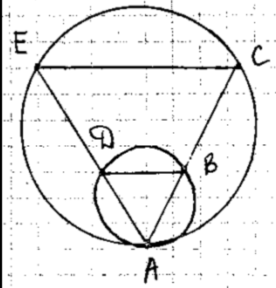
Часть 2

11. Представлено решение ученика.

(1 балл) Проверьте решение и опишите все найденные ошибки.

(2 балла) Предложите правильное решение.

Условие. Две окружности разных радиусов касаются внутренним образом в точке A. Через точку A проведены две прямые, пересекающие данные окружности: одна из них пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C, другая пересекает меньшую в точке D, большую – в точке E. Докажите, что прямые BD и CE параллельны.



Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACE$:
по теореме об отрезках секущих
$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, кроме того
$\angle A$ – общий, значит, $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ по
углу и пропорциональным сторонам $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACE \Rightarrow EC \parallel DB$ по признаку

12. Представлено решение ученика.

(1 балл) Кратко прокомментируйте это решение. В своем комментарии укажите ошибки и неточности, если они есть. Объясните, в чем состоят эти ошибки и к каким последствиям привели.

(1 балл) Исправьте эту ошибку (ошибки) и доведите (допишите) решение до верного ответа. (Оценивается решение, соответствующее логике решения ученика, но верное. Оформление не оценивается.)

(2 балла) Решите данное неравенство графическим способом. (построение графика необходимо объяснить – достаточно кратких пояснений).

Решите неравенство: $2\sqrt{x+2} < \frac{9}{x+4} - 1$

Решение: Заметим, что $2\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow$
$\frac{9}{x+4} - 1 \geq 0$

Возведем обе части в квадрат:

$4(x+2) < \left(\frac{9}{x-4} - 1\right)^2$

$4x+8 < \left(\frac{5-x}{x+4}\right)^2$

$\frac{4x^3+32x^2+64x+8x^2+64x+128-25+10x-x^2}{(x+4)^2} < 0$

$\frac{4x^3+39x^2+138x+103}{(x+4)^2} < 0$ т.к. $(x+4)^2 > 0$, то

$(x+1)(4x^2+35x+103) < 0 \Rightarrow x < -1$

Из условия $x+2 \geq 0 \Rightarrow$ решение будет

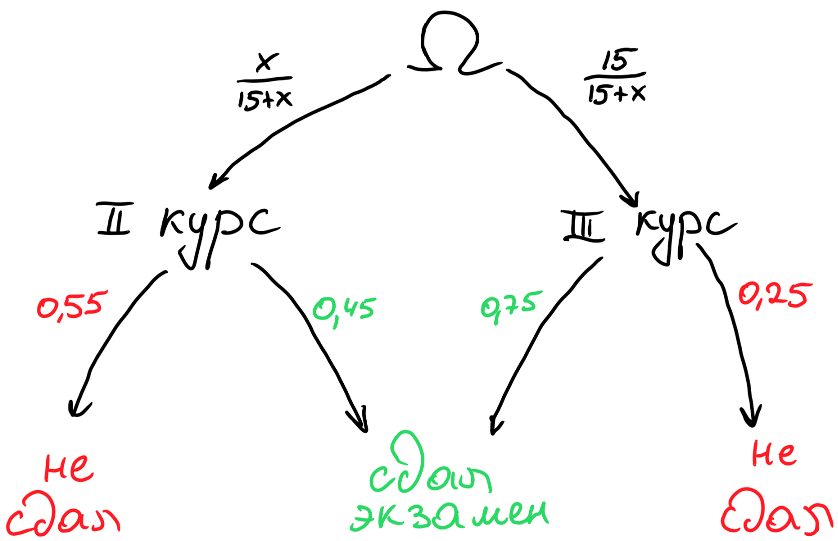
$\boxed{-2 \leq x < -1}$ ответ

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

В задачах 1–5 оценивается только верный ответ — 1 балл.

1	2	3	4	5
20	-8	7.5	$\frac{40}{7}$	$\{-20; -6; -2; 2; 4; 8; 22\}$

6. Ответ: $\frac{1}{6}$.
2 балла — приведено верное решение, построено дерево или есть правильное текстовое объяснение (за арифметическую ошибку баллы не снижаются);
1 балл — приведен только верный ответ или верно найдено количество второкурсников;
0 баллов — в остальных случаях.



Пусть второкурсников x человек. Тогда вероятность того, что случайный студент, сдающий экзамен — второкурсник составляет $\frac{x}{15+x}$, а вероятность того, что случайный студент, сдающий экзамен — третьекурсник составляет $\frac{15}{15+x}$. Построим дерево событий и укажем известные вероятности на его рёбрах. По условию $\mathbb{P}(\textit{не сдать экзамен}) = 0.325 = 1 - \mathbb{P}(\textit{сдать экзамен})$, откуда $\mathbb{P}(\textit{сдать экзамен}) = 0.675$, но из формулы полной вероятности имеем уравнение:

$$\frac{x}{15+x} \cdot \frac{45}{100} + \frac{15}{15+x} \cdot \frac{75}{100} = 0.675,$$

откуда $x = 5$. Осталось вычислить условную вероятность

$$\mathbb{P}\left(\textit{второкурсник}|\textit{сдал экзамен}\right) = \frac{\mathbb{P}(\textit{второкурсник сдал экзамен})}{\mathbb{P}(\textit{студент сдал экзамен})} = \frac{0.25 \cdot 0.45}{0.625} = \frac{1}{6}.$$

7.
2 балла — приведено верное обоснованное решение (не снижаем баллы за использование одинаковых букв при записи корней тригонометрического уравнения);
1 балл — приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов или верное решение с арифметической ошибкой (двумя или более);

0 баллов — в остальных случаях.

Пусть $k = \sin x$, тогда уравнение имеет вид $6k^3 + k^2 - 4k + 1 = 0$. Раскладываем многочлен на множители, например используя следствие из теоремы Безу:

$(k+1)(2k-1)(3k-1) = 0$, откуда получаем:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = -1, \\ &\sin x = \frac{1}{2}, \\ &\sin x = \frac{1}{3}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ &x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l, \\ &x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \\ &x = \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, \\ &x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi t, \end{aligned}\right. \qquad k,l,m,n,t \in \mathbb{Z}.$$

8. Ответ: 90°.

2 балла — приведено верное решение с доказательством всех фактов;

1 балл — приведено верное решение с неточностями в доказательстве отдельных фактов;

0 баллов — в остальных случаях.

Воспользуемся тем, что центр описанной окружности лежит на прямой, симметричной высоте относительно биссектрисы, то есть в нашем случае в точности на медиане треугольника. При этом центр описанной окружности суть точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника, но из условия треугольник неравнобедренный, а значит пересечение медианы, проведённой к AB и серединного перпендикуляра к этой же стороне - единственная точка M, откуда следует, что треугольник ABC — прямоугольный.

Достаточно также провести среднюю линию треугольника MM_A и показать, что точки M_A, M, H, C лежат на одной окружности.

9. Ответ: $\{1; -7\}$.

4 балла — полное и обоснованное решение;

3 балла — полное и обоснованное решение с вычислительной ошибкой;

*2 балла — найдены $b = 1$ **и** $b = -7$ без доказательства отсутствия других значений параметра;*

*1 балл — найдено $b = 1$ **или** $b = -7$;*

0 баллов — в остальных случаях.

Сумма расстояний на числовой прямой от x до 3 и от x до $-b$ должна быть равна 4. Таким образом для бесконечного числа решений достаточно, чтобы расстояние между числами $-b$ и 3 было равно 4, откуда $b = 1$ или $b = -7$.

10. Ответ: $\arctan\frac{1}{27}$. *2 балла — обоснованно найден угол между касательными (не снижаем баллы, если найден тангенс угла);*

1 балл — найдены уравнения касательных в точке $(3;8)$ предварительно проверено, что точка $(3;8)$ — общая, или приведено верное решение, но не проверено, что точка $(3;8)$ — общая;

0 баллов — в остальных случаях.

Угол между кривыми в их точке пересечения суть угол между их касательными в этой точке. Для нахождения ответа достаточно найти производные данных функций в точке с абсциссой 3, предварительно проверив, что точка $(3;8)$ - общая. Пусть $f(x) = x^2 - 9x + 26$,

$g(x) = \dfrac{24}{x}$. Тогда $f'(3) = -3$, $g'(3) = -\dfrac{8}{3}$, осталось найти угол между касательными. Пусть $f'(x) = -3 = \operatorname{tg}\alpha$, $g'(3) = -\dfrac{8}{3} = \operatorname{tg}\beta$, тогда искомый угол $\varphi = |\alpha - \beta|$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\left|-\frac{8}{3} + 3\right|}{1+8} = \dfrac{1}{27}$.

11. Ошибки:

- Некорректно применена теорема об отрезках секущих;
- После "доказательства" подобия треугольников указано равенство не соотвествующих углов.

а) 1 балл – верно указана хотя бы одна ошибка;
б) 2 балла – представлено верное доказательство;
1 балл – приведено верное доказательство, но не доведено до конца.

Решение: Достаточно провести общую касательную в точке A и воспользоваться равенством угла между касательной и секущей и вписанных углов.

12. Ошибки:

- Неравносильный переход при возведении в квадрат;
- Нет проверки $x + 4 \neq 0$.

Комментарий: в решении используется знак $\Longrightarrow$ вместо $\Longleftrightarrow$.

а) 1 балл — верно указана ошибка, приведены обоснования.
б) 1 балл — приведено верное решение или просто рассмотрено место с ошибкой и получен верный ответ;
в) 2 балла -– верно построен график функции, верно найдены решения неравенства, есть пояснения к построению;
1 балл — на графике нет ключевых точек: пересечения с осями, выколотые точки, не указаны асимптоты (или нет пояснений к ним);
0 баллов – в остальных случаях.