Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

6 апреля 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 25**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Сколько различных целых значений принимает функция
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 11 \sin x?$$

2. Игральный кубик бросается дважды. Какие значения может принимать сумма выпавших чисел, если вероятность выпадения этой суммы равна $\frac{1}{9}$?

3. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором значение выражения $\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n}$ меньше, чем 0,01.

4. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 7$, $BC = 8$, $BM = 5{,}5$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4^x - 7, \\ 2^{x-1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

6. Найдите все целочисленные решения уравнения $6x^2 - 3xy + y^2 = 4$.

7. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащие точки B, равны 60° и 90° соответственно. В каком отношении отрезок BD делится стороной AC?

8. Найдите все такие пары $(p; q)$, что многочлен $x^3 + 4x^2 + x - 6$ делится на трёхчлен $x^2 + px + q$.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение $|2x - 3| = x + a$ имеет ровно два решения.

10. Железные дороги, соединяющие пункты A и B и пункты B и C, — равные отрезки, причём угол ABC равен 60°. Из A в B выехал первый поезд, в это же время из B в C выехал второй. Когда первый поезд проехал 100 км, треугольник, вершинами которого являются два поезда и пункт B, в первый раз оказался прямоугольным (поезда и пункты считаются материальными точками). Когда второму поезду останется проехать 30 км до пункта C, указанный треугольник во второй раз станет прямоугольным. Найдите длину AB. (Поезда движутся с постоянными скоростями.)

Часть 2

К задачам 11—12 приведены рукописные тексты решений.

1) Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.

2) Предложите правильное решение.

11. Решите уравнение $\sqrt{x + 26 - 10\sqrt{x+1}} = 3$.

$\sqrt{x+1-10\sqrt{x+1}+25} = 3$

$\sqrt{(\sqrt{x+1}-5)^2} = 3$

$\sqrt{x+1}-5=3$

$\sqrt{x+1}=8$

$x+1=64$ $x=63$ Ответ: 63.

12. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 12 и имеют ровно 6 различных натуральных делителей.

Пусть $A \vdots 12$. Т.к. $12=3\cdot4$, то

$A=3^n\cdot4^k$, где $n,k\in\mathbb{N}$.

У такого числа кол-во натур. делителей равно

$(n+1)\cdot(k+1)=6$. Заметим, что $n+1\geqslant2$ и $k+1\geqslant2$.

$\Rightarrow$ Уравнение имеет 2 решения

1) $\begin{cases} n+1=2 \\ k+1=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} n+1=3 \\ k+1=2 \end{cases}$

$n=1$, $k=2$ $\Rightarrow$ $A=48$ $n=2$, $k=1$ $\Rightarrow$ $A=36$

Ответ: 36, 48.

Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

. . . .

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 20.
1 балл — при верном ходе решения получен ответ, отличающийся от верного на 1.

2. 5 и 9.
1 балл — найден только одно из возможных значений.

3. 2000.
1 балл — получен верный ответ, но обоснование минимальности является недостаточным.

4. $2\sqrt{195}$.

5. $(2;-3)$.

6. $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(-1;-1)$, $(-1;-2)$.
1 балл — верно найдены все возможные значения только одной из переменных.

7. $\sqrt{3}$.

8. $(1;-2)$, $(2;-3)$, $(5;6)$.
1 балл — верно найдены только две из трёх пар.

9. $(-\frac{3}{2};+\infty)$.
1 балл — при верном ходе решения получен ответ, который отличается от верного включением точки $-\frac{3}{2}$.

10. 450 км.
1 балл — ответ также содержит число 20, которое возникает при решении квадратного уравнения, но не подходит по условию.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Неверно найден корень из квадрата: $\sqrt{(\sqrt{x+1}-5)^2} = |\sqrt{x+1}-5|$. Отсутствие ОДЗ ошибкой в данной задаче не является!
Ответ. 3 и 63.

12. *Ошибка 1.* Неверно записан вид числа A. Не все числа, кратные 12, можно представить в таком виде.
Ошибка 2. Неверно найдено количество натуральных делителей числа A. Для нахождения количества натуральных делителей следует представить число A в виде $3^n \cdot 2^{2k}$. Тогда получаем $(n+1)\cdot(2k+1)$ делителей.
1 балл — найдена хотя бы одна из ошибок в представленном решении.
Ответ. 12.