

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1–10.

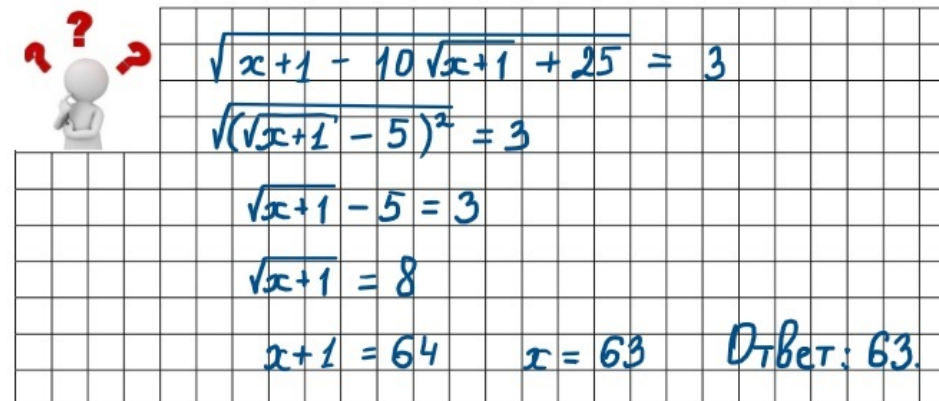
- Сколько различных целых значений принимает функция  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 11 \sin x$ ?
- Игральный кубик бросается дважды. Какие значения может принимать сумма выпавших чисел, если вероятность выпадения этой суммы равна  $\frac{1}{9}$ ?
- Найдите наименьшее натуральное число  $n$ , при котором значение выражения  $\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n}$  меньше, чем 0,01.
- В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 7$ ,  $BC = 8$ ,  $BM = 5,5$ .
- Решите систему уравнений  $\begin{cases} y^2 = 4^x - 7, \\ 2^{x-1} + y + 1 = 0. \end{cases}$
- Найдите все целочисленные решения уравнения  $6x^2 - 3xy + y^2 = 4$ .
- Продолжение высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную около него окружность в точке  $D$  (точки  $B$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AC$ ). Градусные меры дуг  $AD$  и  $CD$ , не содержащие точки  $B$ , равны  $60^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно. В каком отношении отрезок  $BD$  делится стороной  $AC$ ?
- Найдите все такие пары  $(p; q)$ , что многочлен  $x^3 + 4x^2 + x - 6$  делится на трёхчлен  $x^2 + px + q$ .
- Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $|2x - 3| = x + a$  имеет ровно два решения.
- Железные дороги, соединяющие пункты  $A$  и  $B$  и пункты  $B$  и  $C$ , — равные отрезки, причём угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Из  $A$  в  $B$  выехал первый поезд, в это же время из  $B$  в  $C$  выехал второй. Когда первый поезд проехал 100 км, треугольник, вершинами которого являются два поезда и пункт  $B$ , в первый раз оказался прямоугольным (поезда и пункты считаются материальными точками). Когда второму поезду останется проехать 30 км до пункта  $C$ , указанный треугольник во второй раз станет прямоугольным. Найдите длину  $AB$ . (Поезда движутся с постоянными скоростями.)

Часть 2

К задачам 11–12 приведены рукописные тексты решений.

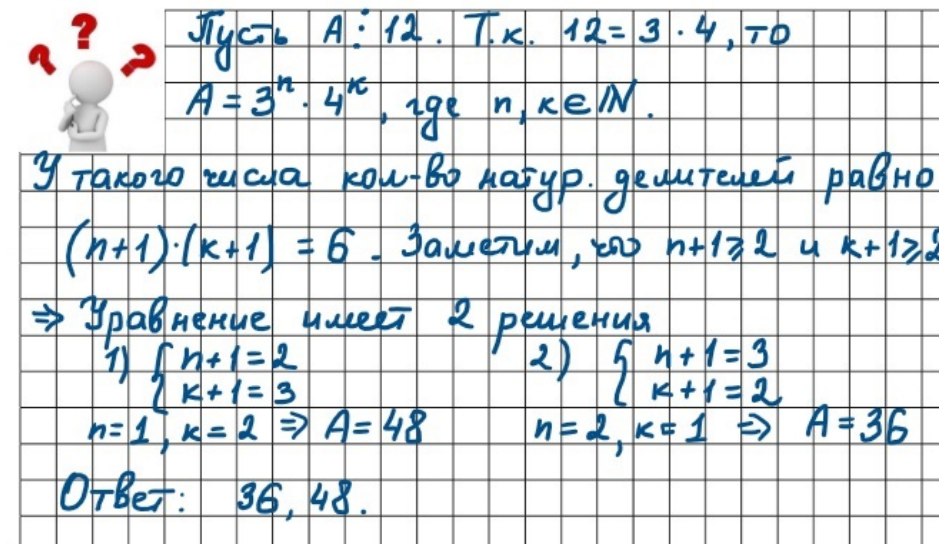
- Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.
- Предложите правильное решение.

11. Решите уравнение  $\sqrt{x+26} - 10\sqrt{x+1} = 3$ .



$\sqrt{x+1} - 10\sqrt{x+1} + 25 = 3$   
 $\sqrt{(\sqrt{x+1} - 5)^2} = 3$   
 $\sqrt{x+1} - 5 = 3$   
 $\sqrt{x+1} = 8$   
 $x+1 = 64$      $x = 63$     Ответ: 63.

12. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 12 и имеют ровно 6 различных натуральных делителей.



Пусть  $A: 12$ . Т.к.  $12 = 3 \cdot 4$ , то  
 $A = 3^n \cdot 4^k$ , где  $n, k \in \mathbb{N}$ .  
 У такого числа кол-во натур. делителей равно  
 $(n+1) \cdot (k+1) = 6$ . Заметим, что  $n+1 \geq 2$  и  $k+1 \geq 2$ .  
 $\Rightarrow$  Уравнение имеет 2 решения  
 1)  $\begin{cases} n+1=2 \\ k+1=3 \end{cases}$     2)  $\begin{cases} n+1=3 \\ k+1=2 \end{cases}$   
 $n=1, k=2 \Rightarrow A=48$      $n=2, k=1 \Rightarrow A=36$   
 Ответ: 36, 48.

Желаем успехов!

Индивидуальные результаты выполнения диагностической работы будут направлены на указанный при регистрации адрес почты.

## ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

- .....
- За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
- ✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
  - ✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
  - ✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

### Ответы и комментарии

1. 20.  
*1 балл* — при верном ходе решения получен ответ, отличающийся от верного на 1.
2. 5 и 9.  
*1 балл* — найден только одно из возможных значений.
3. 2000.  
*1 балл* — получен верный ответ, но обоснование минимальности является недостаточным.
4.  $2\sqrt{195}$ .
5.  $(2; -3)$ .
6.  $(0; 2)$ ,  $(0; -2)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(-1; -1)$ ,  $(-1; -2)$ .  
*1 балл* — верно найдены все возможные значения только одной из переменных.
7.  $\sqrt{3}$ .
8.  $(1; -2)$ ,  $(2; -3)$ ,  $(5; 6)$ .  
*1 балл* — верно найдены только две из трёх пар.
9.  $(-\frac{3}{2}; +\infty)$ .  
*1 балл* — при верном ходе решения получен ответ, который отличается от верного включением точки  $-\frac{3}{2}$ .
10. 450 км.  
*1 балл* — ответ также содержит число 20, которое возникает при решении квадратного уравнения, но не подходит по условию.

В задачах 11–12:

- ✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
- ✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
- ✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Неверно найден корень из квадрата:  $\sqrt{(\sqrt{x+1}-5)^2} = |\sqrt{x+1}-5|$ . Отсутствие ОДЗ ошибкой в данной задаче не является!  
*Ответ.* 3 и 63.
12. *Ошибка 1.* Неверно записан вид числа  $A$ . Не все числа, кратные 12, можно представить в таком виде.  
*Ошибка 2.* Неверно найдено количество натуральных делителей числа  $A$ . Для нахождения количества натуральных делителей следует представить число  $A$  в виде  $3^n \cdot 2^{2k}$ . Тогда получаем  $(n+1) \cdot (2k+1)$  делителей.  
*1 балл* — найдена хотя бы одна из ошибок в представленном решении.  
*Ответ.* 12.