Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

10 июня 2023 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 23**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Дано выражение

$$A(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4}{x-2\sqrt{x}-3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{3}{3-\sqrt{x}}.$$

а) Найдите все значения x, при которых выражение $A(x)$ имеет смысл.
б) Упростите выражение $A(x)$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\cos^2 x+\sin x+4$ и все значения аргумента, при которых оно принимается.

3. Докажите, что при всех значениях переменных x, y справедливо неравенство $2x^2+13y^2\geqslant 10xy$. При каких значениях x, y достигается равенство?

4. Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

5. Решите уравнение $x^2+4x+1+2\sqrt{x+2}=0$.

6. Окружность касается сторон $AB=5$ и $BC=7$ прямоугольника $ABCD$ и проходит через его вершину D. Найдите радиус окружности.

7. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-3ax+a^2+5=0$ имеет два корня, один из которых равен 3.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $AC=6$. На стороне BC отмечена такая точка K, что $\angle AKC=\angle BAC$ и $BK:KC=2:1$. Найдите BC.

9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{|x-2|}\geqslant 4;\\ x^4\leqslant 4x^2+5.\end{cases}$$

10. Натуральные числа a и b независимо друг от друга случайным образом выбираются из отрезка $[1;1000]$. Найдите вероятность того, что значение выражения a^2+b^2 окажется кратно 5.

Часть 2

К задачам 11—12 приведены рукописные тексты решений.
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Числа $2x-1$, x и $\frac{9x+2}{15}$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найдите x.

Ненулевые числа a, b, c составляют геометрическую прогрессию $\Leftrightarrow$ $b=\sqrt{ac}$. Имеем

$$x=\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{9x+2}{15}} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2=(2x-1)\cdot\dfrac{9x+2}{15}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ 3x^2-5x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Ответ: 2.

12. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого из любых n различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми.

Выпишем все простые числа, меньшие 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 89, 97.

Их 24 шт. Добавим 1. Получим 25 различных натуральных чисел, меньших 100, любые два из которых взаимно просты.

Если добавить к этому набору любое другое число, меньшее 100 (оно будет 26-м), то оно будет делиться как минимум на одно из выписанных простых чисел.

Ответ: 26.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

. . . .

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. а) $0 \leqslant x \neq 9$; б) 1.
   ▷ по *1 баллу* за каждый верно выполненный пункт.

2. $5\frac{1}{4}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.
   ▷ *1 балл* — верно и обоснованно получено наибольшее значение, значения аргумента не найдены или найдены неверно.

3. (0; 0). ▷ *1 балл* — неравенство доказано, но значения переменных не найдены или найдены неверно.

4. 90 км.

5. -1.

6. $12 - \sqrt{70}$. ▷ *1 балл* — получен ответ $12 \pm \sqrt{70}$.

7. 7. ▷ *1 балл* — подставлено значение $x = 3$, верно найдены оба корня квадратного уравнения относительно a, но проверка наличия двух корней не выполнялась или выполнена неверно.

8. $6\sqrt{3}$.

9. $[1\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$.
   ▷ *1 балл* — ответ отличается от верного включением точки 2.

10. 0,36.
    ▷ *1 балл* — доказано, что $a^2 + b^2$ кратно 5 лишь в следующих двух случаях:
    а) оба числа a и b кратны 5;
    б) одно из чисел даёт при делении на 5 остаток 1 или 4, а другое — 2 или 3.
    Дальнейшие продвижения или отсутствуют, или содержат ошибки.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. ▷ *Ошибка.* Неверно написано условие, чтобы три числа составляли геометрическую прогрессию (правильно $b^2 = ac$).
    Ответ. 2, $-\frac{1}{3}$.

12. ▷ *Ошибка 1.* Пропущено простое число 73, поэтому, следуя приведённому решению, можно построить набор из 26 чисел, меньших 100, любые два из которых взаимно просты.
    Ошибка 2. В решении не доказано, что если $n \geqslant 27$, то из *любых* n различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми: рассмотренный пример добавления одного числа к конкретному множеству ничего не доказывает.
    Решение. Среди любых 27 различных натуральных чисел, меньших 100, как минимум 26 чисел больше единицы, а следовательно, каждое из 26 чисел имеет хотя бы один простой делитель. Всего простых чисел в промежутке от 1 до 99 ровно 25 (выписанные в «решении» и 73), поэтому какие-то два числа имеют общий простой делитель, а значит, не являются взаимно простыми. Таким образом, искомое число равно 27.
    1 балл — верно указана *хотя бы одна* ошибка в представленном решении, при этом верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.