Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

19 марта 2022 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 14**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё треть пути и снова снизил скорость в два раза, проехав с этой скоростью оставшуюся часть пути. Какой из автомобилей быстрее преодолел весь путь и во сколько раз?
2. Найдите натуральное число n, для которого верно равенство

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=123{,}4(9).$$

3. В треугольнике углы образуют арифметическую прогрессию, причем отношение большего угла к меньшему равно 3. Найдите отношение радиуса описанной окружности этого треугольника к радиусу вписанной.
4. Остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2-7x+10$ равен $4-3x$. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $x-5$.
5. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана такая точка K, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причем $AN=BC$. Найдите отношение $BK:KN$.
6. Числа x, y, z таковы, что $\dfrac{y+2z-3x}{x}=\dfrac{4y-3z+9x}{z}=1$. Найдите $\dfrac{z}{x}$.
7. Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 7 натуральных делителей. Ответ обоснуйте.
8. Решите неравенство $\sqrt{9x^4-6x^2+1}\geqslant 2x$.
9. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC, E — точка пересечения прямых AM и CD, K — точка пересечения AM и BD. Найдите площадь треугольника KDE, если $AB=8$, $BC=12$, $\angle BAD=45°$.
10. Найдите все действительные значения a, при которых система уравнений

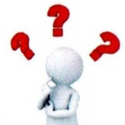
$$\begin{cases} y^2-2x=3-x^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Часть 2

К задачам 11—12 приведены рукописные тексты решений.
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Стрелок участвует в соревновании, где для того, чтобы пройти в следующий круг, нужно набрать хотя бы 4 очка в трёх этапах. В каждом этапе вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4. Если стрелок выигрывает в данном этапе, он получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что у стрелка получится выйти в следующий круг соревнований.



Получить хотя бы 4 очка стрелок может следующими способами: $3+3+3$, $3+3+1$, $3+3+0$, $3+1+1$, $3+1+0$.
Вероятность ничьей равна $1-0{,}4-0{,}4=0{,}2$.
Тогда вероятность получить хотя бы 4 очка
$P=0{,}4\cdot0{,}4\cdot0{,}4+0{,}4\cdot0{,}4\cdot0{,}2+0{,}4\cdot0{,}4\cdot0{,}4+$
$+0{,}4\cdot0{,}2\cdot0{,}2+0{,}4\cdot0{,}2\cdot0{,}4=0{,}208$
Ответ: $0{,}208$

12. Исследуйте функцию $f(x)=x^2(x^2-1)$ на монотонность.

Представим функцию f в виде $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2-1$.
На луче $[0;+\infty)$ функции g и h возрастают, значит, и их произведение также возрастает. Аналогично, на луче $(-\infty;0]$ функция f убывает как произведение убывающих функций.
Ответ: убывает на $(-\infty;0]$, возр. на $[0;+\infty)$.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

....

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. Второй, в $\frac{18}{11}$ раза.
   1 балл — верно определён, какой из автомобилей быстрее преодолел весь путь, но в ответе указано, что он быстрее в $\frac{11}{18}$ раза.
2. 246.
   1 балл — левая часть верно преобразована к виду $\frac{n+1}{2}$.
3. $1+\sqrt{3}$.
   1 балл — верно найдены углы и радиус одной из окружностей.
4. -11
   1 балл — в результате верных рассуждений и деления с остатком в ответ записано 11.
5. 1.
6. $\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$.
7. $3^6=729$.
   1 балл — приведён верный ответ, но отсутствуют обоснования.
   1 балл — приведён пример нетрёхзначного числа (например, $2^6=64$ или 5^6) и присутствует обоснование.
8. $(-\infty;\frac{1}{3}]\cup[1;+\infty)$.
   1 балл — верно получено неравенство с модулем и верно решено неравенство хотя бы в одном случае раскрытия модуля.
   0 баллов — при извлечении корня в левой части потерян модуль.
9. $32\sqrt{2}$.
   1 балл — верно найдено отношение $AK:KE=1:2$.
   1 балл — верно найдена площадь $S_{AKD}=16\sqrt{2}$.
10. $(-3;-1)\cup(1;3)$.
   1 балл — верно найдены только положительные значения параметра: $1<a<3$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением ±1 и/или ±3.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание всех ошибок, указание способа исправить ошибки и получить верное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны все ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не учтена последовательность получения очков. Все слагаемые (кроме отвечающего за три победы) должны входить в сумму с некоторыми коэффициентами.
   Решение. Вероятность двух побед и одной ничьей:
$$P(3+3+1)=3\cdot0{,}4^2\cdot0{,}2,$$
   так как существуют три варианта для расположения ничьей в последовательности этапов. Аналогично,
$$P(3+3+0)=3\cdot0{,}4^3,\quad P(3+1+1)=3\cdot0{,}4\cdot0{,}2^2.$$
   Вероятность победы, проигрыша и ничьей:
$$P(3+1+0)=3!\cdot0{,}4^2\cdot0{,}2,$$
   где 3! — количество перестановок множества из трёх элементов без повторений. Тогда вероятность получить хотя бы 4 очка равна
$$P=0{,}4^3+3\cdot0{,}4^2\cdot0{,}2+3\cdot0{,}4^3+3\cdot0{,}4\cdot0{,}2^2+3!\cdot0{,}4^2\cdot0{,}2=0{,}592.$$
12. *Ошибка.* Данное рассуждение верно только на промежутках $(-\infty;-1]$ и $[1;+\infty)$, на которых обе функции g и h положительны. На отрезке $[-1;1]$ так рассуждать нельзя, так как на нём функция h отрицательна.
   Решение. Чтобы исследовать функцию f на монотонность, представим её в виде $f(x)=x^4-x^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. На луче $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ функция $f_1(x)=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ (а значит, и f) возрастает как композиция возрастающих функций, а на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$ функция f_1 возрастает как композиция убывающих функций. На каждом из промежутков $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ функция f_1 есть композиция возрастающей и убывающей функций и поэтому убывает.
   Ответ: возрастает на $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right]$ и на $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и на $\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.