Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

27 марта 2021 года **Продолжительность 120 минут** **Вариант 1**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

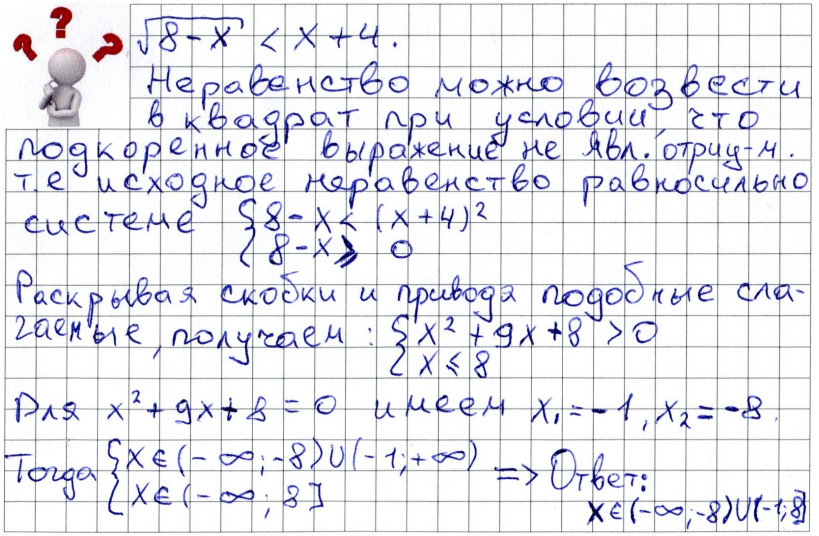
1. Решите уравнение $|\sin \pi x| + |1 + x - 2x^2| = 0$.
2. Найдите все пары простых чисел, разность между которыми равна 21.
3. Влад открыл банковский вклад и внёс 7000 рублей. Проценты начисляются в последний день года и суммируются с текущей величиной вклада. Ровно через один год друг Влада — Паша, открыл такой же вклад на ту же сумму. А через ещё один год Влад и Паша закрыли оба вклада. Известно, что Влад получил на 367 рублей 50 копеек больше чем Паша. Найдите процент, предлагаемый банком по вкладу.
4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые делятся на 11.
5. В студенческой группе 24 человека: 11 юношей и 13 девушек. Для участия в спортивном мероприятии необходимо выбрать трёх студентов одного пола (либо трёх юношей, либо трёх девушек). Сколькими способами это можно сделать?
6. В параллелограмме $MNPQ$ точка K — середина стороны MN, O — точка пересечения отрезков MP и QK. Найдите площадь треугольника MOK, если $OM = 2$, $MQ = 8$ и $\angle PMQ = 30°$.
7. Саша и Кирилл едут на самокатах по двум перпендикулярным друг другу дорогам. До пересечения дорог им обоим осталось ехать ровно по 20 километров. Скорость движения Саши 7 км/ч, а Кирилла — 4 км/ч. Через какое время мальчики будут ближе всего друг к другу? Расстояние измеряется на плоскости.
8. Команда «Балтика» оказалась в зоне вылета в низшую лигу за 2 матча до окончания чемпионата. Чтобы остаться в текущей лиге команде необходимо набрать не менее 4 очков в двух оставшихся матчах. В случае победы команда получает 3 очка, при ничейном результате — 1 очко, в случае проигрыша — 0 очков. Найдите вероятность того, что «Балтика» сохранит место в текущей лиге, считая, что вероятности победы и поражения в каждом матче одинаковы и равны 0,35. Ответ округлите до сотых.
9. Около четырёхугольника $MNPQ$ со сторонами $MN = 4$, $NP = 5$, $PQ = 6$, $QM = 2$ описана окружность. Найдите длину диагонали MP.
10. Найдите все значения q, при каждом из которых множество решений неравенства $(q^2 - 6q + 8)x - q + 4 \geqslant 0$ содержит полуинтервал $[4; 6)$.

Часть 2

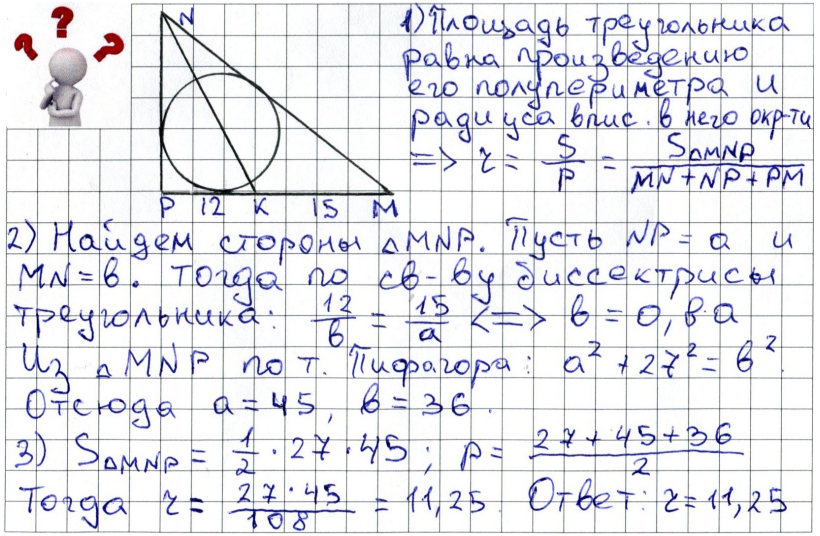
К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите в Вашей работе найденные ошибки.*
2) *Предложите способ исправить ошибки, получить верное решение и дайте верный ответ.*

11. Решите неравенство $\sqrt{8 - x} < x + 4$.



12. Биссектриса NK прямоугольного треугольника MNP с прямым углом P делит сторону MP на отрезки $MK = 15$ и $KP = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MNP.



За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов.

2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами.

1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче.

0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 1.
2. 2 и 23.
3. 5%.
4. 44550.
5. 451.
6. 2.
7. $3\dfrac{5}{13}$ ч.
8. 0,33.
9. $\sqrt{\dfrac{323}{8}}$.
10. $(-\infty; \frac{13}{6}] \cup [4; +\infty)$.
11. *Ошибка.* Переход от неравенства к системе неравенств не является равносильным.

    При равносильном переходе система неравенств будет выглядеть следующим образом:

    $$\begin{cases} x+4>0, \\ 8-x<(x+4)^2, \\ 8-x\geqslant 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+4\geqslant 0, \\ 8-x<(x+4)^2, \\ 8-x\geqslant 0. \end{cases}$$

    Таким образом, на множество накладывается условие $x > -4$, и конечный ответ принимает вид $x \in (-1; 8]$.

    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении (в системе не хватает неравенства $x+4>0$ или $x+4\geqslant 0$), решение не доведено до верного ответа.

    1 балл — верно решено неравенство, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.
12. *Ошибка 1.* Неверно написана формула для радиуса вписанной окружности (не хватает двойки в числителе).

    Ошибка 2. Свойство биссектрисы треугольника использовано неверно.

    Ошибка 3. Применяя теорему Пифагора, неверно найдены значения a и b.

    Правильная запись равенства отношений длин после применения свойства имеет вид

    $$\frac{12}{a} = \frac{15}{b}.$$

    Тогда $a = 0{,}8b$ и, применяя теорему Пифагора для треугольника MNP, получаем $NP = a = 36$ и $NM = b = 45$. Значит, радиус вписанной в треугольник MNP окружности равен $\frac{36\cdot 27}{108} = 9$.

    1 балл — верно указаны все ошибки в представленном решении, верное решение задачи не представлено или представлено, но не доведено до верного ответа.

    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана не полностью.