Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

20 апреля 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 26**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Мастер и ученик, работая вместе (каждый на своём станке), изготавливают за 3 часа столько же деталей, сколько мастер в одиночку изготавливает за 4 часа. Сколько времени потребуется ученику, чтобы в одиночку изготовить это же количество деталей?

2. Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число будет иметь сумму цифр, равную 13.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x(x^2+12y^2) = y(6x^2+8y^2)+1, \\ 2^{2x-3y} = 16\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Красная Шапочка испекла пирожки и понесла их бабушке. По дороге ей встретился сначала медведь, потом заяц. Медведю она отдала треть имеющихся у неё пирожков, а зайцу — 12% оставшихся пирожков. Сколько пирожков испекла Красная Шапочка, если их было меньше 100?

5. Найдите на графике уравнения $x^2+y^2+6y = 4(x+3)$ точку, ближайшую к точке $A(8;5)$.

6. Решите неравенство $|7-3x-5x^2| \leqslant 1$.

7. Величины углов образуют арифметическую прогрессию: $6°, 13°, 20° \ldots$ Какое наименьшее число подряд идущих членов этой последовательности, начиная с первого, следует взять, чтобы сумма их косинусов была равна нулю?

8. На прямой отмечено 11 точек, а на параллельной ей прямой — 9 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

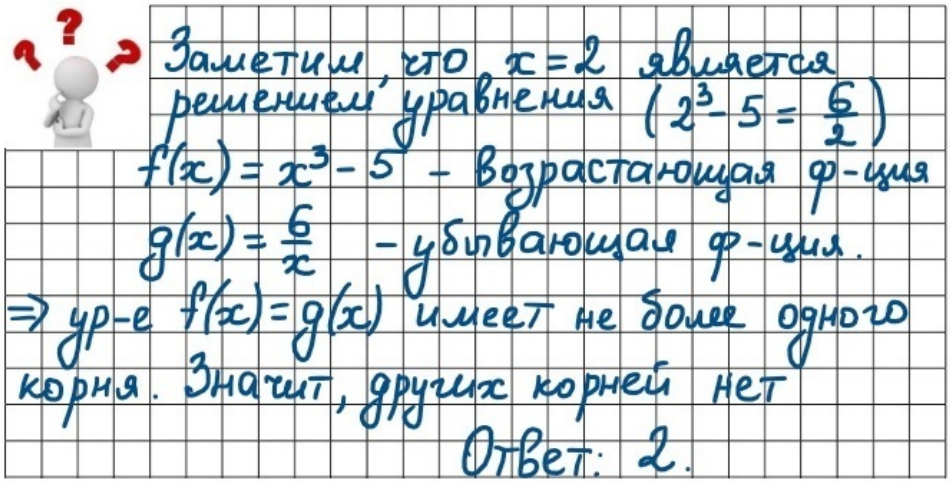
9. Высоты AK и BH остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $BO : OH = 2 : 1$. Найдите BH, если $AH = 6$, $CH = 11$.

10. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\sqrt{3x+a} = x$$
имеет ровно одно решение.

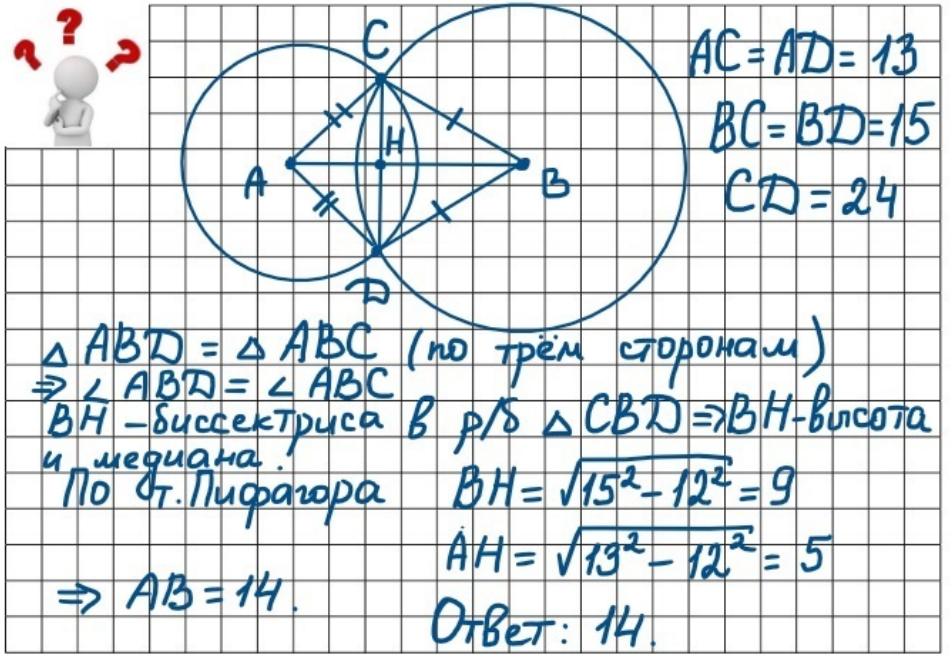
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. Решите уравнение $x^3 - 5 = \frac{6}{x}$.



12. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей.



ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 12 ч.
2. $\frac{1}{15}$.
3. $(6; 2\frac{1}{2})$.
4. 75.
5. $(5; 1)$.
   1 балл — задача верно сведена к нахождению точки пересечения окружности и прямой, проходящей через точку A и центр окружности, заданной данным уравнением.
6. $\left[-1{,}6; -\frac{3+\sqrt{129}}{10}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{129}-3}{10}; 1\right]$.
   1 балл — обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением одного или нескольких концов отрезков.
   1 балл — взаимное расположение на числовой прямой точек (концов отрезков) не обосновано.
7. 25.
   1 балл — дан верный ответ, но отсутствует обоснование минимальности.
8. 891.
   1 балл — обоснованно получено выражение $11 \cdot C_9^2 + 9 \cdot C_{11}^2$, но его значение не найдено или найдено неверно.
9. $3\sqrt{22}$.
10. $\{-\frac{9}{4}\} \cup (0; +\infty)$.
    1 балл — при верном ходе решения ответ отличается от верного исключением точки $-\frac{9}{4}$ или включением точки 0.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Функция $g(x)$ не является убывающей на области определения.
    Ответ. -1, 2.
12. *Ошибка.* Не рассмотрен второй случай расположения окружностей.
    Ответ. 4 и 14.