Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

26 августа 2024 года **Продолжительность 150 минут** **Вариант 28**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. В мае Влад ездил на электросамокате со скоростью, равной целому числу километров в час. Известно, что он проезжал 60 км за целое число часов. В июне вышло обновление в прошивке самоката и скорость движения снизилась на 5 км/ч, но Влад снова проезжал 60 км за целое число часов. Такая же ситуация повторилась в июле и в августе. С какой скоростью ездил Влад в мае? Предполагается, что Влад в течение каждого месяца ездит с постоянной скоростью.
2. Две стороны треугольника равны 1,3 и 2,1. а) Найдите все значения, которые может принимать длина третьей стороны. б) При каком значении длины третьей стороны площадь треугольника будет наибольшей?
3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, которые записаны цифрами 1, 2, 3, 4 (все эти цифры должны быть использованы в каждом числе).
4. Решите неравенство $f(f(x)) \leqslant 0$, если $f(x) = \frac{4}{x} - 1$.
5. Вкладчик в начале первого квартала кладёт на счёт в банке некоторую сумму. В конце квартала на неё начисляется $n\%$, после чего он снимает половину исходной суммы. На оставшуюся часть суммы на счёте в конце второго квартала начисляется $k\%$, где $n + k = 60$. При каком значении n сумма на счёте вкладчика в конце второго квартала будет максимальной?
6. Найдите все значения $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых числа $\sin\alpha$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha$, взятые в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию.
7. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на стороне $AC = 20$, а две другие — на сторонах $AB = 7$ и $BC = 15$. Найдите сторону квадрата.
8. Игральный кубик изготовлен из неоднородного материала: вероятность выпадения каждой грани обратно пропорциональна числу, которое на ней написано. Найдите вероятность выпадения нечётного числа.
9. Решите уравнение $(x-1)(x+2) + 3(x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} = 4$.
10. На координатной плоскости изображены множества решений трёх уравнений: $y = |y|$, $x - a = -|x-a|$, $|y-x| = x - y$. При каждом натуральном значении a найдите количество точек с целыми координатами, принадлежащих всем трём множествам.

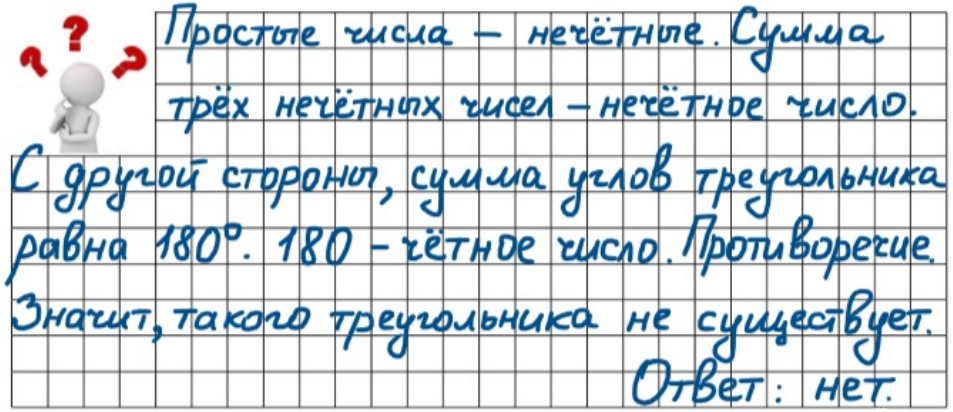
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*

1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*

2) *Предложите правильное решение.*

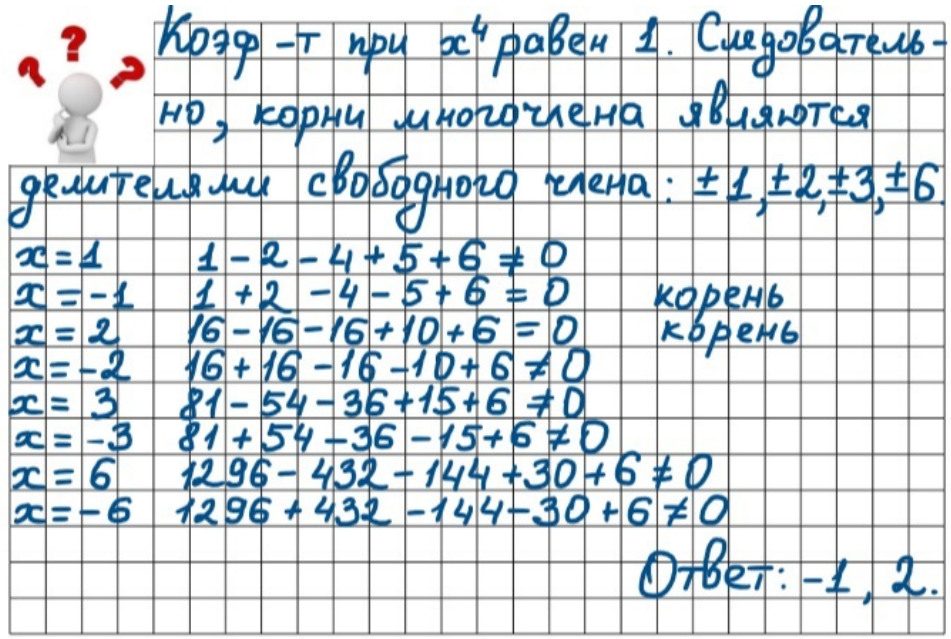
11. Существует ли треугольник, градусная мера каждого угла которого выражается простым числом?



Простые числа — нечётные. Сумма трёх нечётных чисел — нечётное число. С другой стороны, сумма углов треугольника равна 180°. 180 — чётное число. Противоречие. Значит, такого треугольника не существует.

Ответ: нет.

12. Решите уравнение $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = 0$.



Коэф-т при x^4 равен 1. Следовательно, корни многочлена являются делителями свободного члена: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

$x=1$ $\quad 1-2-4+5+6 \neq 0$

$x=-1$ $\quad 1+2-4-5+6=0$ корень

$x=2$ $\quad 16-16-16+10+6=0$ корень

$x=-2$ $\quad 16+16-16-10+6 \neq 0$

$x=3$ $\quad 81-54-36+15+6 \neq 0$

$x=-3$ $\quad 81+54-36-15+6 \neq 0$

$x=6$ $\quad 1296-432-144+30+6 \neq 0$

$x=-6$ $\quad 1296+432-144-30+6 \neq 0$

Ответ: -1, 2.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

За каждую задачу выставляется 2, 1 или 0 баллов. В задачах 1–10:
✓ 2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами;
✓ 1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 20 км/ч.
2. а) $(0{,}8; 3{,}4)$; б) $\sqrt{6{,}1}$.
   1 балл — верно решён только один из пунктов.
3. $3! \cdot 10 \cdot 1111 = 66660$.
4. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{5}\right] \cup (4; +\infty)$.
   1 балл — ответ отличается от верного включением точки 0;
   1 балл — ответ отличается от верного исключением точки $\frac{4}{5}$.
5. 55.
   1 балл — точка экстремума найдена с помощью производной, но не обосновано, что это точка максимума.
6. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. $\frac{420}{121} = 3\frac{57}{121}$.
8. $\frac{92}{147}$.
   1 балл — верно найден коэффициент пропорциональности $k = \frac{20}{49}$, ответ не получен или получен неверно.
9. $\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$, $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.
   1 балл — верно найден один из корней уравнения, второй корень не найден или найден неверно.
10. $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$.
    1 балл — верно изображено на координатной плоскости пересечение трёх множеств (границы должны быть подписаны), дальнейшие продвижения отсутствуют или неверны.

В задачах 11–12:
✓ 2 балла выставляется за описание ошибок и за правильное решение, которое может быть получено как в результате исправления ошибок, так и независимым способом (возможно, с мелкими недочётами);
✓ 1 балл выставляется, если или верно описаны ошибки, или приведено верное решение;
✓ 0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

11. *Ошибка.* Не все простые числа нечётные: 2 — простое чётное число.
    Ответ. Существует. Например,
    $$(2^\circ, 79^\circ, 79^\circ), \quad (2^\circ, 5^\circ, 173^\circ), \quad (2^\circ, 11^\circ, 167^\circ), \quad (2^\circ, 29^\circ, 149^\circ),$$
    $$(2^\circ, 41^\circ, 137^\circ), \quad (2^\circ, 47^\circ, 131^\circ), \quad (2^\circ, 71^\circ, 107^\circ).$$
    Достаточно привести один пример!
12. *Ошибка.* Только рациональные (целые) корни являются делителями свободного члена. У многочлена могут быть иррациональные корни, которые таким способом найти нельзя.
    Решение. Для поиска остальных корней разделим многочлен на
    $$(x-2)(x+1).$$
    Имеем $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (x-2)(x+1)(x^2 - x - 3)$. Решая уравнение $x^2 - x - 3 = 0$, находим ещё два корня $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.
    Ответ. -1, 2, $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.