Проект «Математическая вертикаль»

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

28 августа 2021 года **Продолжительность 120 минут**

Часть 1

Напишите полные обоснованные решения задач 1—10.

1. Один водяной насос может наполнить бассейн за 10 часов, а второй — за 8 часов. Спустя ровно 4 часа после того, как насосы вместе начали накачивать воду в бассейн, первый насос сломался. Через какое время после этого момента второй насос заполнит весь бассейн?

2. Известно, что числа $\frac{x}{2}$, $3-2x$, $\frac{18}{x}+1$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, а его гипотенуза равна 10. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в $60°$. От двух причалов A и B, расположенных на разных реках, одновременно вышли байдарка и лодка, собственные скорости которых равны 10 км/ч и 3 км/ч соответственно. Байдарка достигла озера через 2 часа, а лодка — через 4 часа. Найдите скорость течения рек, если $AB = 28$ км.

5. Решите неравенство
$$\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} \leqslant \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} + (x-1)^3.$$

6. Решите уравнение $40k + n = 5kn$, где k, n — целые числа.

7. Буквы слова ВЕЛИКАН нарезали на карточки (по одной букве на каждой), карточки перемешали, а затем случайным образом выложили в ряд. Какова вероятность, что получилось слово ВАЛЕНКИ? Ответ дайте в процентах, округлив результат до сотых.

8. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7.

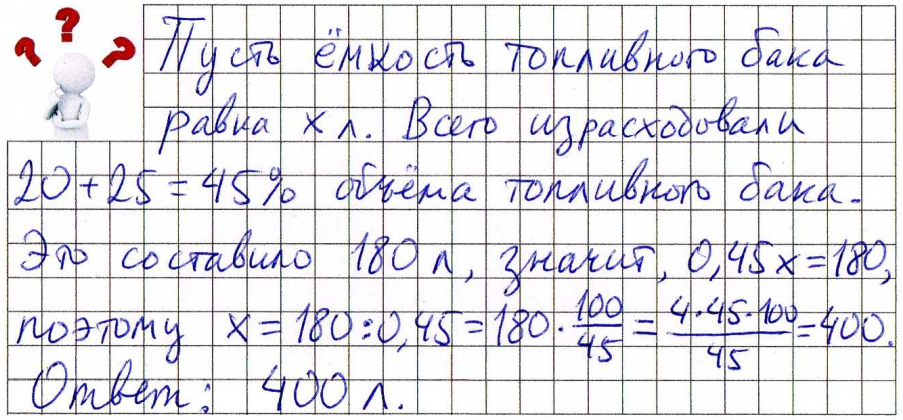
9. На стороне BC треугольнике ABC выбрана такая точка K, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причём $AN = BC$. Докажите, что $\angle MBC = \angle ANM$.

10. График функции $f(x) = |x-2|+1$, где $x \in \mathbb{R}$, и график функции $g(x)$ симметричны относительно точки $(1, 3)$. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $f(x-a) = g(x+a)$ имеет бесконечно много решений.

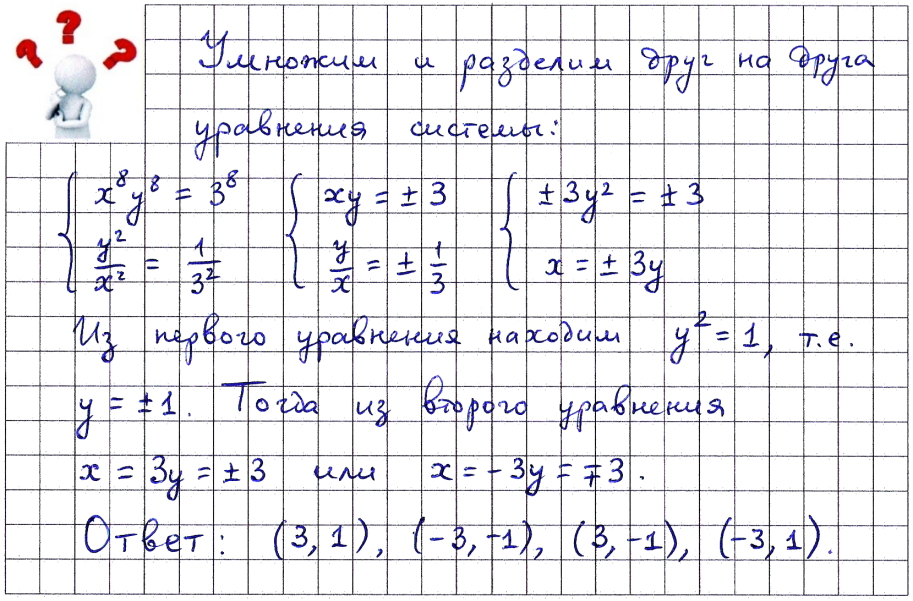
Часть 2

К задачам 11—12 *приведены рукописные тексты решений.*
1) *Проверьте решения и опишите все найденные ошибки.*
2) *Предложите правильное решение.*

11. В грузовой автомобиль залили полный бак бензина. В первую поездку израсходовали 20% бензина, а во вторую — 25% остатка. Всего израсходовали 180 л бензина. Какова ёмкость топливного бака?



12. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3y^5 = 27, \\ x^5y^3 = 243. \end{cases}$



28.08.2021 **ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ**

За каждую из задач 1—10 выставляется 2, 1 или 0 баллов.

2 балла выставляется за полное обоснованное решение, возможно, с мелкими недочётами.

1 балл выставляется, если или решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или в решении имеются значительные продвижения, описанные ниже после ответа к соответствующей задаче.

0 баллов выставляется во всех остальных случаях.

Ответы и комментарии

1. 48 минут.
   1 балл — в ответ записано время от начала (4 часа 48 минут).

2. $-\dfrac{52}{25} = -2{,}08$.
   1 балл — верно найден $x = \frac{25}{8}$, знаменатель прогрессии не найден или найден неверно.
   0 баллов — выписано и решается уравнение $3 - 2x = \sqrt{\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{18}{x} + 1\right)}$.

3. 2.
   1 балл — верно найдены катеты прямоугольного треугольника, но радиус вписанной окружности не вычислен или вычислен неверно.

4. 4 км/ч.
   1 балл — правильно написано уравнение для нахождения скорости реки, но само уравнение решено неверно.

5. 1.
   1 балл — верно найдена область определения неравенства, но отсутствует проверка, что $x = 1$ удовлетворяет неравенству.

6. $(0, 0)$, $(1, 10)$.
   1 балл — получено разложение на линейные множители, например, $(n - 8)(5k - 1) = 8$, но решение не окончено или содержит ошибку ИЛИ найдены оба ответа, но не доказано, что других нет.

7. 0,02%.
   1 балл — верно найден ответ в виде $\dfrac{1}{7!}$, но округление не сделано или сделано неверно.

10. -3; 1.
    1 балл — верно построены графики функций f и g, найдено уравнение $g(x) = 5 - |x|$.

В задачах 11—12 за описание всех ошибок выставляется 1 балл и за верное решение также выставляется 1 балл.

11. *Ошибка* состоит в том, что находить количество израсходованного за две поездки бензина, складывая проценты, нельзя, поскольку эти проценты взяты от разных величин: от полного бака и от остатка. Приведём правильное решение.
    Пусть объём бака равен x л. Тогда после первой поездки осталось $(1 - 0{,}2)\,x = 0{,}8x$ л бензина. После второй поездки осталось $(1 - 0{,}25) \cdot 0{,}8x = 0{,}75 \cdot 0{,}8x = 0{,}6x$ л бензина. Значит, было израсходовано $0{,}4x$ л бензина, что по условию составляет 180 л. Таким образом, $0{,}4x = 180$ л, поэтому $x = 450$ л.
    Ответ: 450 л.
    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении.
    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.

12. *Ошибка* состоит в том, что после умножения и деления уравнений системы получаются уравнения-следствия, система из которых не равносильна исходной. Поэтому для всех найденных решений необходима проверка с помощью подстановки в исходную систему.
    Ответ: $(3, 1)$, $(-3, -1)$.
    1 балл — верно указана ошибка в представленном решении.
    1 балл — верно решена задача, но ошибка в представленном решении не описана или описана неверно.